Inoffizielle Probeprüfung Diskrete Mathematik und Logik WS 25

AUTHOR
Daniel Schwarzenbach

Disclaimer: “Diese Probeprüfung dient nur zu Übungszwecken. Sie deckt den ganzen Stoff **nicht** ab.”

120 min

90 Punkte je 10 pro Aufgabe

ca. 45 Punkte zum Bestehen

1. Induktion
2. Logik
3. Relationen
4. Äquivalenzrelationen
5. Ordnungsrelationen
6. Funktionen
7. Kombinatorik
8. Graphentheorie
9. Abzählen

1 Induktion *10 Pkt*

1.1 Induktion I *5 Pkt*

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Hinweis: Benutzen Sie die Gaußsche Summenformel!

> Bitte auf einem separatem Blatt lösen

1.2 Induktion II *5 Pkt*

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion das Binomialtheorem:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Hinweis: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

> Bitte auf einem separatem Blatt lösen

2 Logik *10 Pkt*

2.1 Logische Äquivalenzen *5 Pkt*

Zeigen Sie mittels logischer Äquivalenzen, dass: $\neg(A \oplus B) \equiv \neg A \oplus B \equiv A \oplus \neg B$.

Geben Sie bei jedem Schritt an, welche logische Regel Sie angewendet haben. - *Nutzen Sie:*
$A \oplus B \equiv (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \quad (\text{Definition von } \oplus)$

> Bitte auf einem separatem Blatt lösen

2.2 Wahrheitstabellen *5 Pkt*

Betrachten sie folgende Julia-Funktion:

```julia
function f(x::Integer, y::Integer)::Bool
    if B(x ,y) && C(x, y)
        return A(x, y)
    else
        if B(x, y)
            return !A(x, y)
        else
            return A(x, y)
        end
    end
end
```

Wir können die Funktion auch als logische Formel schreiben:

$$f = \Big((B \land C) \to A\Big) \land \Big(\neg(B \land C) \to \big((B \to (\neg A)) \land (\neg B \to A)\big)\Big)$$

Vereinfachen Sie die Formel mittels einer Wahrheitstabelle so weit wie möglich. Wie sieht die vereinfachte Funktion aus? - *Schreiben sie die Funktion in Pseudocode/(Sprache ihrer Wahl).*

> Bitte auf einem separatem Blatt lösen

3 Relationen *10 Pkt*

Betrachten sie die Funktion Digits, die jeder natürlichen Zahl die Menge ihrer Ziffern zuordnet.

$\text{Digits} : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$

$\text{Digits}(a) = \{d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \mid (\exists k \in \mathbb{N})[d = \lfloor \frac{a}{10^k} \rfloor \mod 10]\}$

Digits kann wie folgt berechnet werden:

```
function Digits(number::Integer)::Set{Integer}
    # Initialisiere die leere Menge
    set = Set{Integer}()
    # Sonderfall für 0
    if number == 0
        push!(set, 0)
        return set
    end
    while number > 0
        # Füge die letzte Ziffer von digits zu set hinzu
        push!(set, number % 10)
        # Entferne die letzte Ziffer von digits
        number ÷= 10
    end
    return set
end
```

z.B. $\text{Digits}(1729) = \{1,2,7,9\}, \quad \text{Digits}(696) = \{6,9\}, \quad \text{Digits}(4002) = \{0,2,4\}.$

3.1 Eigenschaften von Relationen *5 Pkt*

Die Relation $R_1 \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sei definiert durch:

$$R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \mathrm{Digits}(a) \subseteq \mathrm{Digits}(b)\}$$

Finden Sie heraus, ob die Relation reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv oder linear ist. Begründen Sie ihre Antworten.

a. reflexiv

b. symmetrisch

c. antisymmetrisch

d. transitiv

e. linear

3.2 Äquivalenzen *3 Pkt*

Betrachten Sie die Relation $R_2 \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \text{Digits}(a) = \text{Digits}(b)\}$$

Zeigen Sie, oder widerlegen Sie das R_2 eine Äquivalenzrelation ist.

Falls R_2 eine Äquivalenzrelation ist, wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Falls R_2 **keine** Äquivalenzrelation ist, welche Elemente X müssten hinzugefügt werden, sodass $R_2 \cup X$ eine Äquivalenzrelation ist?

3.3 Bedingungen von Halbordnungen *2 Pkt*

Betrachten Sie die Relation $R_3 \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, die der Relation R_1 ähnlich ist:

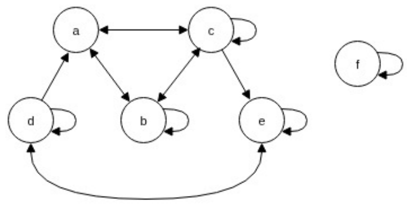
$$R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \text{Digits}(a) \subseteq \text{Digits}(b) \wedge \lambda\}$$

mit der nicht näher definierten Bedingung λ.

Definieren sie die Bedingung λ so, dass R_3 zu einer nicht symmetrischen Halbordnung wird. Was sind dann die minimalen Elemente von $(\mathbb{N}, R_3)$?

4 Äquivalenzrelationen *10 Pkt*

Folgender gerichteter Graph $G = (A, R)$ veranschaulicht eine binäre Relation R auf der Grundmenge $A = \{a, b, c, d, e, f\}$:



4.1 Äquivalenzrelationen I - *1.5 Pkt*

Welche Kanten müssen dem Graphen **hinzugefügt** werden, damit R eine Äquivalenzrelation wird?

Geben Sie die Kanten an, sowie ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen an.

4.2 Äquivalenzrelationen II - *1.5 Pkt*

Welche Kante muss **hinzugefügt** und welche zwei Kanten müssen dem Graphen **entfernt** werden, damit R eine Äquivalenzrelation wird?

Geben Sie die Kanten an, sowie ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen an.

4.3 Modulo - *2 Pkt*

Geben Sie die Menge der Äquivalenzklassen von $M = \{(x, y) \mid (x^2 \mod 5) = (y^2 \mod 5)\} \subseteq \mathbb{N}^2$ an.

4.4 Multidimensionale Representantensysteme - *1.5 Pkt*

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ eine Äquivalenzrelation wobei $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \times \{0\}$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ und $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ verschiedene Representatensysteme von W sind. Geben Sie ein passendes W an. - *Hinweis: Sie benötigen die Sinusfunktion für die Definition von W.*

4.5 Die Super Relation - *0.5 Pkt*

Sei B eine Beliebige Menge. Welche Relation $R \subseteq B \times B$ ist sowohl Äquivalenzrelation, Halbordnung und zugleich eine Bijektion?

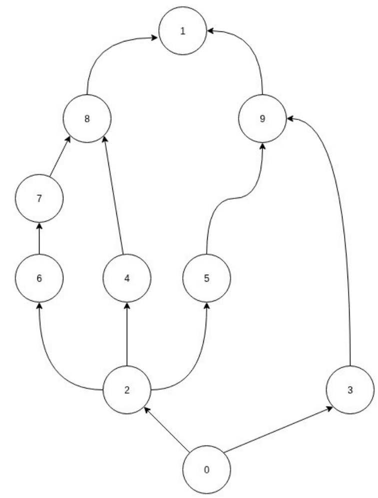
4.6 Kombinatorik der Äquivalenzrelationen - *3 Pkt*

a. Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es auf der Menge $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$ - *1 Pkt*

b. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Menge $[n]$ in genau k intern **geordnete** Äquivalenzklassen zu partitionieren? Die Klassen selbst sind dabei geornet, aber zwischen jeweils zwei verschiedenen Klassen herscht keine Ordnung. - *Hinweis: Sie benötigen für das Lösen dieser Aufgabe* ***keine*** *Stirling-Zahlen* - *2 Pkt*

5 Ordnungsrelationen *10 Pkt*

Betrachten Sie die Halbordnung $\preceq_H \subseteq [9]\times[9]$ definiert durch folgendes Hasse-Diagramm:



5.1 Untere Schranken *2 Pkt*

Sei nun $O_1 = (\{9, 8\}, \preceq_H)$ eine halbgeordnete Menge.

a. Was sind die unteren Schranken von O_1?

b. Was ist das Infimum von O_1?

5.2 Obere Schranken *2 Pkt*

Sei nun $O_2 = (\{2, 3\}, \preceq_H)$ eine halbgeordnete Menge.

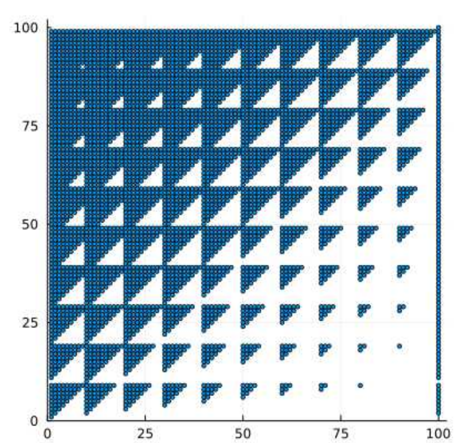
a. Was sind die oberen Schranken von O_2?

b. Was ist das Supremum von O_2?

Die Quersumme einer Zahl bezüglich der Basis 10, $q_{10} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kann wie folgt berechnet werden:

```
function q₁₀(n::Integer)::Integer
    sum = 0
    while n > 0
        sum += n % 10 # sum = n mod 10
        n ÷= 10 # n = ⌊n / 10⌋
    end
    return sum
end
```

$\preceq_{q_{10}}$ angewendet auf$[100]\times[100]$



z.B $q_{10}(1729) = 1 + 7 + 2 + 9 = 19, \quad q_{10}(13) = 1 + 3 = 4$

Die Halbordnung $\preceq_{q_{10}} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist definiert durch:

$$\preceq_{q_{10}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid q_{10}(a) < q_{10}(b) \lor a = b\}$$

5.3 Hasse-Diagramm *2 Pkt*

Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der halbgeordneten Menge $(\,([7,10] \cup [17,20]) \cap \mathbb{N}\,, \preceq_{q_{10}})$. - *Hinweis: Das muss nicht schön sein, nur lesbar*

5.4 Bedingungen der Ordnung *3 Pkt*

a. Zeigen Sie, dass $\preceq_{q_{10}}$ eine Halbordnung ist. - *2 Pkt*

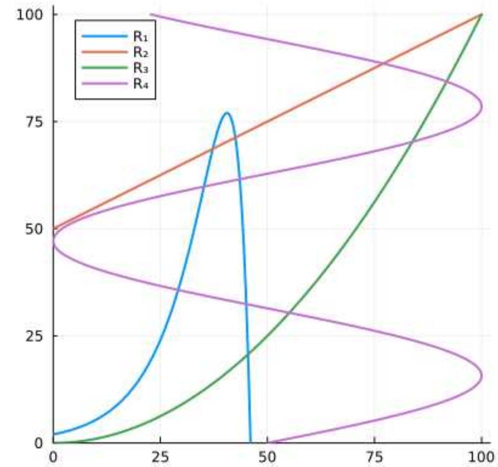
b. Zeigen Sie, dass $\preceq_{q_{10}}$ keine Ordnung ist. - *1 Pkt*

5.5 Minimale Elemente *1 Pkt*

Was ist die Menge der minimalen Elemente bezüglich der halbgeordneten Menge $(\mathbb{N}_+, \preceq_{q_{10}})$?

6 Funktionen *10 Pkt*

6.1 Eigenschaften von Funktionen *2 Pkt*



Gegeben sind 4 Relationen $R_i \subseteq [0, 100] \times [0, 100]$ für $i \in [4]$:

Wobei die Horizontale Achse den ersten(linken) Wert des Tupels und die Vertikale Achse den zweiten(rechten) Wert des Tupels darstellt.

Kreuzen sie an, welche der Eigenschaften auf die Relationen zutreffen:

Relation	linkstotal	linkseindeutig	rechtstotal	rechtseindeutig
R_1	☐	☐	☐	☐
R_2	☐	☐	☐	☐
R_3	☐	☐	☐	☐
R_4	☐	☐	☐	☐

Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion definiert durch:

$$f(x, y) = x^2 + y^x$$

6.2 Bildmenge *2 Pkt*

Geben Sie die Bildmenge $f(A)$ von $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 < x + y \leq 2\}$ unter f an.

6.3 Urbildmenge *2 Pkt*

Geben Sie die Urbildmenge $f^{-1}(B)$ von $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5 \land (\exists m \in \mathbb{N})[m^2 = n]\}$ unter f an. - *Hinweis: $0^0 := 1$*

6.4 **Injektionen und Surjektionen** ***2 Pkt***

Seien A, B zwei **endliche** Mengen. Es existieren eine surjektive Funktion $s : A \to B$ die jedoch nicht injektiv ist. Welche der folgenden Aussagen gilt dann? Begründen Sie ihre Antwort.

1. Es existiert eine bijektive Funktion $b : A \to B$ mit einer inversen Funktion $b^{-1} : B \to A$.
2. Es existiert **keine** bijektive Funktion $b : A \to B$.
3. Es lässt sich noch nicht sagen, ob es eine bijektive Funktion $b : A \to B$ gibt oder nicht.

6.5 **Hintereinanderausführung** ***2 Pkt***

Gibt es eine injektive Funktion $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die jedoch nicht surjektiv ist und eine surjektive Funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die jedoch nicht injektiv ist, sodass die Hintereinanderausführung von $s \circ i$ eine bijektive Funktion ist? – Wenn ja, welche? Wenn nein, warum nicht?

7 Kombinatorik *10 Pkt*

Ein Pokerdeck besteht aus 52 Karten $F \times W$, aufgeteilt in 4 Farben
$F = \{\mathrm{Karo}, \mathrm{Herz}, \mathrm{Pik}, \mathrm{Kreuz}\}$ mit jeweils 13 Werten
$W = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \mathrm{Bube}, \mathrm{Dame}, \mathrm{König}, \mathrm{Ass}\}$ der Grösse nach aufgelistet.

Beim 5-Card-Draw ziehen sie jeweils 5 Karten auf einmal in die Hand und können dabei verschiedene Kombinationen formen.

Karten in der Hand sind als Teilmenge von $F \times W$ zu betrachten bzw. die Hand ist nicht geordnet.

7.1 Hand *1 Pkt*

a. Wie viele Möglichkeiten gibt es 5 Karten zu auf einmal ziehen? - *Das Angeben der Formel genügt. - 0.5 Pkt*

b. Wie viele Möglichkeiten gäbe es 5 Karten nacheinander zu ziehen, wobei nun die Reihenfolge des Ziehens eine Ordnung $\leq_{\mathrm{draw}}$ impliziert unter welcher wir unterscheiden? - *0.5 Pkt*

Im folgenden werden wir mit “ziehen” immer “5 Karten auf einmal ziehen” meinen.

7.2 Royal Flush *0.5 Pkt*

Ein Royal Flush ist mit 0.000154 Auftrittswahrscheinlichkeit die seltenste und wertvollste Kombination. Dazu müssen sie in der Hand (10, Bube, Dame, König, Ass) von der selben Farbe haben.

Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Royal Flush zu ziehen? - *Bitte die vollständige Zahl angeben*

7.3 Strasse *1 Pkt*

Eine Strasse besteht aus 5 Karten mit 5 aufeinander folgenden Werten. Bsp: $(8, 9, 10, \text{Junge}, \text{Dame})$

Einfachhalt halber erlauben wir keine zyklischen Stassen wie $(\text{König}, \text{Ass}, 2, 3, 4)$ sondern nur welche die von klein nach gross gehen. Royal Flush und Staight Flush sind auch Stassen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es eine Strasse zu ziehen. - *Das angeben der Formel genügt.*

7.4 Full House *2.5 Pkt*

Ein Fullhouse besteht aus einem Drilling aus 3 gleichen Werten und einem Paar aus 2 gleichen Werten.

a. Wie viele Möglichkeiten haben sie ein Fullhouse zuerst zu ziehen, und dann in einer Reihe anzuordnen? - *Das Angeben der Formel genügt. - 1 Pkt*

b. Nun kann man nur noch den Wert der Karten lesen, nicht aber die Farbe. Wie viele Möglichkeiten haben sie jetzt noch ein Fullhouse zuerst zu ziehen, und dann in einer Reihe anzuordnen? - *Das Angeben der Formel genügt. - 1.5 Pkt*

7.5 **Betrug** ***3 Pkt***

Sie wollen nun beim 5-Card-Draw betrügen. Dazu haben sie sich ein zweites Deck von Karten besorgt, die von den echten Karten nicht zu unterscheiden sind. Sie haben sich dann die Beiden Karten (Pik,Ass) und (Herz, Ass), noch vor dem Ziehen, heimlich auf die Hand getan. Nun haben sie 7 Karten in der Hand:

2x(Pik,Ass), 2x(Herz, Ass), 1x(Pik,König), 1x(Kreuz,Ass), 1x(Karo,Ass)

a. Wie viele Möglichkeiten haben sie diese 7 Karten in einer Reihe anzuordnen? - *Das Angeben der Formel oder Anzahl genügt. - 1 Pkt*

b. Wie viele Möglichkeiten haben sie nur **5** dieser 7 Karten in einer Reihe anzuordnen? - *Das Angeben der Formel oder Anzahl genügt. - 2 Pkt*

7.6 Stirling Zahlen *2 Pkt*

a. 4 Spieler sitzen in einem Kreis/Zyklus. Jeder zieht 5 Karten. Dann legen alle Spieler ihre Karten so auf den Tisch, sodass die gezogenen Karten einen Zyklus bilden.

Wie viele Zyklen lassen sich so mit den 52 Karten bilden? - *Das Angeben der Formel oder Anzahl genügt. - 1 Pkt*

b. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 52 Karten auf 4 Spieler zu verteilen, wobei nicht jeder Spieler zwingend eine Karte erhalten muss? Heißt jeder Spieler $i \in [4]$ hat $k_i \in \{0, \dots, 52\}$ Karten mit

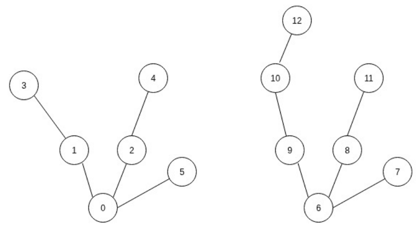
$$\sum_{i \in [4]} k_i = 52$$

Das Angeben der Formel oder Anzahl genügt. - 1 Pkt

8 Graphentheorie *10 Pkt*

8.1 Wälder *3 Pkt*

Gegeben sei der folgende Wald W:



a. Was ist der Durchmesser der beiden zusammenhängenden Teilgraphen (Bäume) von W? Geben Sie dazu die jeweiligen Knotenpaare an, die dem Durchmesser entsprechen. - *1 Pkt*

b. Geben Sie die Prüfercodes der beiden Bäume von W an. - *1 Pkt*

d. Ist jeder Wald bipartit? Begründen Sie! - *1 Pkt*

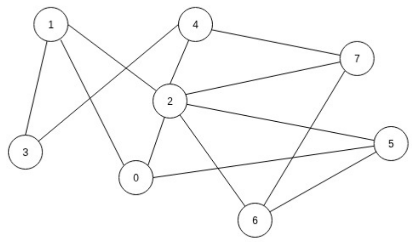
8.2 Färbung von Graphen *2 Pkt*

Ordnen Sie die untenstehenden Graphen nach ihrer chromatische Zahl χ von klein nach gross mit $\prec_\chi$ dazwischen, falls die chromatische Zahl echt kleiner ist, oder mit $\equiv_\chi$ dazwischen falls die chromatische Zahl gleich ist.

K^4, $K_{9,3}$, C_7, Q_8, $M_{7,3}$.

8.3 Eigenschaften von Graphen *5 Pkt*

Gegeben sei der folgende Graph G:



a. Welche Gradfolge besitzt der Graph G? - *1 Pkt*

b. Ist G planar? Begründen Sie ihre Antwort. - *1 Pkt*

c. Ist der Baum mit dem Prüfer-Code 212624 ein Spannbaum von G? Begründen Sie ihre Antwort. - *1 Pkt*

d. Ist G bipartit? Begründen Sie ihre Antwort. - *1 Pkt*

e. Was ist die chromatische Zahl $\chi(G)$ und der chromatische Index $\chi'(G)$? - *1 Pkt*

9 Abzählen *10 Pkt*

9.1 Doppeltes Abzählen *2 Pkt*

Zeigen Sie mittels doppeltem Abzählen, dass ein Maximum $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bezüglich der Größe von Halbordnungen auf $[n] = \{1, \ldots, n\}$ existiert, sodass jede Halbordnung $\preceq \subseteq [n] \times [n]$ gerade nicht mehr als $g(n)$ Elemente hat, bzw:

$$(\forall \preceq)\,[|\preceq| \leq g(n)] \quad \wedge \quad (\exists \preceq)\,[|\preceq| = g(n)]$$

Berechnen Sie $g(n)$ explizit.

> Bitte auf einem separatem Blatt lösen

9.2 Inklusions-Exklusionsprinzip *4 Pkt*

Berechnen Sie mittels dem Inklusions-Exklusionsprinzip die Anzahl der Zahlen in $[90]$, die aus der multiplikation zweier Primzahlen besteht. - *Hinweis: Primzahlen* $\leq \sqrt{90}$ *sind* $\{2, 3, 5, 7\}$

> Bitte auf einem separatem Blatt lösen

9.3 Schubfachschluss *4 Pkt*

In einer Menge von n natürlichen Zahlen gibt es immer zwei Zahlen, deren Differenz durch $n - 1$ teilbar ist. Beweisen Sie dies mit dem Schubfachschluss. - *Hinweis: Betrachten Sie die Menge “Reste der Division durch* $n - 1$ *”.*

> Bitte auf einem separatem Blatt lösen